Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Giugno 1954 - Serie IV, vol. XXXII, n. 3 (pagg. 142-149)

CARLO FELICE MANARA

mia copia

L'aspetto algebrico di un fondamentale teorema di geometria descrittiva

non prestare

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Giugno 1954 - Serie IV, vol. XXXII, n. 3 (pagg. 142-149)

L'aspetto algebrico di un fondamentale teorema di geometria descrittiva.

1. Il presente articolo ha lo scopo di illustrare l'aspetto algebrico di un fondamentale Teorema di Geometria Descrittiva, mediante l'esame del sistema di equazioni che servono alla dimostrazione analitica di esso; tale esame riguarda in particolare la realtà delle soluzioni e la natura delle irrazionalità da cui esse dipendono.

Il Teorema in discorso viene abitualmente indicato come Teorema del POHLKE e può venire enunciato così:

« Tre segmenti di un piano: $O'P_1'$, $O'P_2'$, $O'P_3'$ uscenti « da uno stesso punto O' ed aventi direzioni e lunghezze « arbitrarie (purchè non più di uno dei tre segmenti e non « più di uno dei loro angoli sia nullo) possono sempre essere « considerati come proiezioni — eseguite da un centro im- « proprio C_∞ — di tre segmenti OP_1, OP_2, OP_3 dello spazio « uguali tra loro e mutuamente perpendicolari. Inoltre i punti « O, P_1, P_2, P_3 ed il centro C_∞ sono determinabili per via « elementare a partire dai punti dati O', P_1', P_2', P_3' ».

Si conoscono di questo Teorema molte dimostrazioni ([1]) tanto analitiche quanto sintetiche; queste ultime poi hanno raggiunto un grado di semplicità e di eleganza che difficilmente può essere superato.

Tuttavia chi consideri le dimostrazioni abituali è portato a fermare l'attenzione su alcune circostanze che fanno desi-

([1]) Si veda per es. G. LORIA, *Storia della Geometria Descrittiva*, cap. XII.

derare di vedere maggiormente illustrato il loro aspetto algebrico.

Al fine di chiarire queste circostanze osserviamo qui anzitutto in via preliminare che la quaterna di punti O, P_1, P_2, P_3 può essere traslata parallelamente a sè stessa nella direzione di C_∞ senza che cambino le proiezioni dei punti stessi; pertanto nel seguito noi supporremo sempre che il punto O coincida con il punto O' del piano π.

Ora è subito visto che se a partire da una data quaterna di punti O', P_1', P_2', P_3', del piano π si trovano quattro punti O, P_1, P_2, P_3 ed un centro di proiezione C_∞ come è detto nell'enunciato, esiste almeno un altro centro C'_∞ cosiffatto e precisamente il simmetrico di C_∞ rispetto al piano π.

Inoltre per ogni centro esistono almeno due quaterne O, P_1, P_2, P_3 cosiffatte, simmetriche tra loro rispetto ad un piano normale alla direzione del centro stesso.

Quindi il problema geometrico di trovare — a partire da una data quaterna O', P_1', P_2', P_3' di un piano π — un centro C_∞ ed una quaterna O, P_1, P_2, P_3 di punti dello spazio che soddisfino all'enunciato si traduce analiticamente in un problema (ovviamente algebrico) di grado superiore al primo e più precisamente almeno di quarto grado.

Pertanto la traduzione dell'enunciato del teorema del Pohlke in termini algebrici consiste sostanzialmente nell'affermare che il suddetto problema algebrico ammette sempre soluzioni reali per valori reali dei dati (pur essendo di grado superiore al primo); ed inoltre che le soluzioni del problema stesso sono sempre esprimibili mediante radicali quadratici (pur essendo il problema di grado almeno quarto).

La dimostrazione del teorema per via analitica consisterà dunque di due stadi fondamentali: anzitutto nella traduzione analitica dell'enunciato ed in secondo luogo nella discussione del sistema di equazioni così ottenuto.

Il prossimo paragrafo è dedicato appunto alla traduzione analitica dell'enunciato del teorema, traduzione che ovviamente non può avere nessuna pretesa di originalità. I paragrafi successivi sono poi dedicati alla discussione del sistema di equazioni ottenute, e precisamente alla dimostrazione dell'esistenza di soluzioni reali (per dati reali) e della loro esprimibilità mediante radicali quadratici.

2. Siano dunque dati in un piano π quattro punti O', P_1', P_2', P_3'; assumiamo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale avente l'origine in O' e l'asse delle z perpendicolare al piano π.

Fissato O coincidente con O', siano OP_1, OP_2, OP_3 tre segmenti mutuamente perpendicolari e tali che si abbia

$$OP_1 = OP_2 = OP_3 . \tag{1}$$

Indichiamo con x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ le coordinate non nulle del punto P_i' e con X_i, Y_i, Z_i le coordinate del punto P_i.

La uguaglianza dei tre segmenti OP_1, OP_2, OP_3, si traduce analiticamente con le equazioni

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 . \tag{2}$$

Nel seguito indicheremo con ρ^2 il valore comune dei tre membri di queste due equazioni; il significato geometrico di ρ è ovviamente quello del raggio della sfera di centro O sulla quale si trovano i tre punti P_1, P_2, P_3.

Il fatto poi che i tre segmenti OP_1, OP_2, OP_3 siano mutuamente ortogonali si traduce analiticamente con le tre equazioni

$$\begin{aligned} X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 &= X_2X_3 + Y_2Y_3 + Z_2Z_3 = \\ &= X_3X_1 + Y_3Y_1 + Z_3Z_1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Si può esprimere brevemente il fatto che sussistano le equazioni (2) e (3) dicendo che il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{X_1}{\rho} & \frac{Y_1}{\rho} & \frac{Z_1}{\rho} \\ \frac{X_2}{\rho} & \frac{Y_2}{\rho} & \frac{Z_2}{\rho} \\ \frac{X_3}{\rho} & \frac{Y_3}{\rho} & \frac{Z_3}{\rho} \end{vmatrix}$$

è un *determinante ortogonale*. È noto dalla teoria dei determinanti ([2]) che le relazioni (2) e (3) sono perfettamente equivalenti alle seguenti

$$\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{3} Z_i^2 \tag{4}$$

([2]) Cfr. per es. E. Pascal, *I determinanti*, Hoepli, Milano, § 46.

$$\sum_{i=1}^{3} X_i Y_i = \sum_{i=1}^{3} Y_i Z_i = \sum_{i=1}^{3} Z_i X_i = 0 \tag{5}$$

che useremo sempre nel seguito; ovviamente il valore comune dei tre membri delle due equazioni (4) è ancora ρ^2.

Siano ora u, v, 1 tre numeri proporzionali ai coseni direttori della retta OC_∞, nel sistema di riferimento assunto. Il fatto che P_i' sia proiezione di P_i da C_∞ si traduce nelle equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} x_i &= X_i - uZ_i \\ y_i &= Y_i - vZ_i \end{aligned} \right. \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

Pertanto, in base a quanto è stato detto fin qui, il teorema del POHLKE è equivalente al seguente

TEOREMA. - Dati sei numeri reali x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$, il sistema delle undici equazioni (4), (5), (6) nelle undici incognite u, v, X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$ ammette sempre soluzioni reali ed esprimibili in base ai dati mediante radicali quadratici.

Per la dimostrazione dedurremo anzitutto dal sistema di equazioni (4), (5) e (6) un sistema di due equazioni che ci permettono di trovare i valori delle incognite u e v le quali determinano la posizione del centro di proiezione C_∞.

Precisamente dalle (6) per quadratura e moltiplicazione si hanno, tenendo conto delle (4) e (5), le equazioni seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{3} X_i^2 + u^2 \sum_{i=1}^{3} Z_i^2 \\ \sum_{i=1}^{3} y_i^2 &= \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 + v^2 \sum_{i=1}^{3} Z_i^2 . \\ \sum_{i=1}^{3} x_i y_i &= uv \sum_{i=1}^{3} Z_i^2 \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Scriveremo queste equazioni in modo più conciso facendo le seguenti posizioni

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} x_i^2 &= \xi \\ \sum_{i=1}^{3} y_i^2 &= \eta \quad . \\ \sum_{i=1}^{3} x_i y_i &= \vartheta \end{aligned} \right. \tag{8}$$

e ricordando che è

$$\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{3} Z_i^2 = \rho^2.$$

Allora il sistema (7) viene scritto nella forma

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi = \rho^2(1 + u^2) \\ \eta = \rho^2(1 + v^2). \\ \vartheta = \rho^2 uv \end{cases}$$

È questo il sistema fondamentale di equazioni che, a partire dai dati (cioè a partire da ξ, η e ϑ), permette di trovare il punto C_∞ ed il raggio ρ della sfera Σ su cui stanno i tre punti P_1, P_2, P_3.

Dal sistema (9) per eliminazione di ρ^2 si ottiene il sistema seguente

$$(10) \qquad \begin{cases} \vartheta u^2 - \xi uv + \vartheta = 0 \\ \vartheta v^2 - \xi uv + \vartheta = 0 \end{cases}$$

che discuteremo nel prossimo paragrafo.

3. Sia dunque il sistema (10) di due equazioni nelle due incognite u e v. Ricordiamo ora che u, v, 1 sono proporzionali ai coseni direttori della retta OC_∞ e pertanto u e v risultano coincidenti con le coordinate x ed y del punto K in cui la retta OC_∞ interseca il piano $z = 1$. Possiamo dunque interpretare geometricamente il sistema (10) dicendo che il punto K suddetto è dato dalla intersezione delle due coniche del piano $z = 1$ che hanno le equazioni

$$(10)^* \qquad \begin{cases} \vartheta x^2 - \xi xy + \vartheta = 0 \\ \vartheta y^2 - \eta xy + \vartheta = 0. \end{cases}$$

Il problema di trovare le intersezioni delle due coniche (10)* è di quarto grado ma qui risulta risolubile per radicali quadratici perchè le due coniche hanno visibilmente il centro comune, coincidente con l'origine delle coordinate.

Questa circostanza equivale, come è noto, alla conoscenza di una omologia involutoria che muta in sè ambedue le coniche e, quindi, alla conoscenza di una radice della risolvente cubica della equazione risultante del sistema (10).

Pertanto le coordinate del punto K sono ottenute a partire dai dati mediante radicali quadratici e di conseguenza il punto K è costruibile elementarmente a partire dai punti O', P_1', P_2', P_3'.

In base alle equazioni (9), lo stesso si può dire anche del raggio ρ della sfera Σ, avente centro in O, sulla quale stanno i punti P_1, P_2, P_3. È facile ora provare la validità della seguente

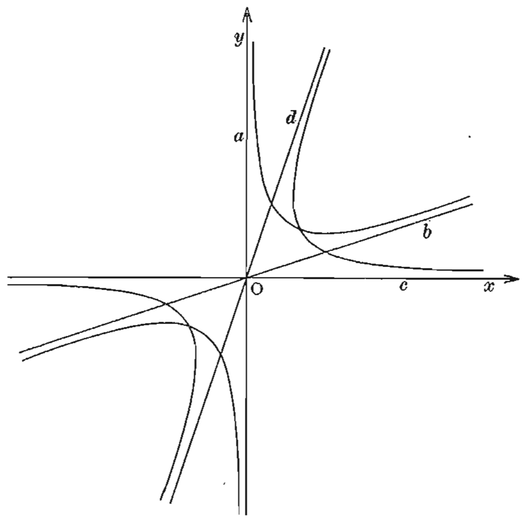
Osservazione. - Noto il punto C_∞, la determinazione dei punti P_1, P_2, P_3 si ottiene mediante una sola irrazionalità quadratica.

Infatti i punti stessi possono essere costruiti con il seguente procedimento: scelto uno dei punti dati su π (escluso O') per es. P_1', lo si congiunge con C_∞; allora il punto P_1 può essere scelto in una delle due intersezioni della retta $P_1' C_\infty$ con la sfera Σ. Fatta questa scelta (che si traduce nella scelta di una delle due radici di un'equazione di II° grado) i punti P_2 e P_3 sono razionalmente determinati come intersezioni delle rette $P_2' C_\infty$ e $P_3' C_\infty$ col piano per O perpendicolare alla retta OP_1.

Ma abbiamo visto poco sopra che il punto K — e quindi il punto C_∞ — è dato da un sistema di IV° grado risolubile elementarmente. Quindi, ricordando l'osservazione fatta ora, possiamo ritenere dimostrata la seconda parte del nostro Teorema affermante che un punto C_∞ ed una quaterna di punti O, P_1, P_2, P_3 soddisfacenti all'enunciato sono costruibili elementarmente a partire dai dati.

4. Rimane ora a dimostrarsi che tra le soluzioni del problema ve ne sono sempre di reali, per dati reali. Questo scopo verrà ottenuto in due stadi fondamentali: verificheremo anzitutto la realtà di due fra le quattro intersezioni delle due coniche (10)* del piano $z = 1$, e di conseguenza la esistenza di due centri di proiezione reali C_∞, C'_∞ soddisfacenti all'enunciato del teorema; verificheremo poi che a partire da ognuno dei due centri C_∞, C'_∞ le quaterne di punti O, P_1, P_2, P_3 che si possono costruire, con il procedimento indicato al precedente paragrafo, sono sempre reali.

Consideriamo dunque ancora il sistema delle coniche (10)* e ricordiamo anzitutto che, come abbiamo osservato, esse hanno il centro in comune, coincidente con l'origine delle coordinate; ne consegue che le loro intersezioni sono a coppie simmetriche rispetto all'origine stessa e di conseguenza che



ad ogni punto C_∞ corrisponde un altro punto C'_∞ simmetrico di esso rispetto al piano π in cui giace la quaterna data. Si osservi in secondo luogo che le coniche (10)* sono iperboli e per ciò stesso coniche a punti reali.

Infine si verifica che le coppie di asintoti delle due iperboli suddette si separano sempre. Infatti gli asintoti della prima sono le due rette a e b aventi rispettivamente le equazioni

$$a \equiv \{ x = 0 \} \qquad b \equiv \{ \vartheta x - \xi y = 0 \}$$

e gli asintoti della seconda sono le rette c e d aventi rispettivamente le equazioni

$$c \equiv \{ y = 0 \} \qquad d \equiv \{ \eta x - \vartheta y = 0 \} .$$

Ora è noto che condizione necessaria e sufficiente affinchè le due coppie ab e cd si separino è che il birapporto $k = (abcd)$ abbia un valore negativo; e dalle equazioni ora scritte si ha facilmente

$$k = (abcd) = \left(\infty, \frac{\vartheta}{\xi}, \ 0, \ \frac{\eta}{\vartheta}\right) = \frac{\vartheta^2 - \xi\eta}{\vartheta^2}$$

Si noti ora che la espressione $\xi\eta - \vartheta^2$, in forza delle posizioni (8), vale il quadrato (simbolico) della matrice a due righe ed a tre colonne

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix}$$

e quindi la somma dei quadrati dei minori della matrice stessa. Pertanto la espressione $\vartheta^2 - \xi\eta$ non è mai positiva ed il solo caso in cui essa può annullarsi corrisponde all'annullarsi contemporaneo di tutti i minori della matrice scritta sopra, ossia alla circostanza geometrica che i punti O', P_1', P_2', P_3' siano tutti allineati. La quale circostanza è stata esplicitamente esclusa dalle nostre ipotesi.

Verificata così la realtà di due tra le intersezioni delle coniche (10)* e quindi di due centri C_∞, C'_∞ di proiezione, rimane a dimostrarsi la esistenza di quaterne di punti O, P_1, P_2, P_3 reali per ogni centro di proiezione.

Questa dimostrazione ci dà un esempio di un notevole tipo di ragionamento cui si ricorre spesso nelle questioni di realità.

Anzitutto ricordiamo che, in base all'osservazione fatta nel precedente paragrafo, noto che sia il centro di proiezione C_∞, la determinazione di una quaterna spaziale di punti O, P_1, P_2, P_3 che si proietti da C_∞ in O', P_1', P_2', P_3' dipende da una sola irrazionalità quadratica. D'altra parte, come abbiamo già osservato, data una quaterna spaziale O, P_1, P_2, P_3 cosiffatta, ne esiste certo un'altra simmetrica della prima rispetto al piano per O perpendicolare alla retta OC_∞, quaterna che ovviamente non può mai coincidere con la prima, nel campo reale. Consideriamo ora una determinata quaterna di punti O', $\bar{P}_1'$, $\bar{P}_2'$, $\bar{P}_3'$ del piano cui corrispondano due quaterne spaziali reali; una quaterna cosiffatta si può sempre costruire per es. proiettando una data quaterna spaziale da un punto C_∞ arbitrario. Con variazione continua nel campo reale, possiamo sempre pensare di ottenere la quaterna data O', P_1', P_2', P_3' a partire dalla O', $\bar{P}_1'$, $\bar{P}_2'$, $\bar{P}_3'$; e durante tutta la variazione le due quaterne spaziali, reali in partenza, rimangono tali perchè, come è noto, le radici reali di una equazione a coefficienti reali possono sparire soltanto a coppie attraverso coincidenze e ciò, nel nostro caso, è impossibile.

Il Teorema è così interamente dimostrato.

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

ABEILLE - *Nuove tavole logaritmiche finanziarie a otto decimali*	1200
Atti del Congresso internazionale dei Matematici (1928) 6 volumi. Ciascuno	1000
Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 Aprile 1937	3000
BELLUZZI - *Scienza delle costruzioni.* Vol. I	3500
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. II	4000
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. III, p. I	1200
— — *Scienza delle costruzioni.* Vol. III, p. II	1800
— — *Metodi semplici per lo studio delle lastre curve*	400
BOLCATO - *Chimica delle fermentazioni.* II edizione	5000
BORDONI - *Fondamenti di fisica tecnica.* Vol. I	5000
BRONZI - *La tecnica dei radiotrasmettitori*	4000
BURGATTI - *Memorie scelte*	2500
CANNERI - *Nozioni di chimica analitica*	3000
CASTELNUOVO - *Calcolo delle probabilità.* Vol. I	1500
— — *Memorie scelte,* pubblicate in occasione del giubileo scientifico	1250
CHISINI - *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*	2500
— — *Esercizi di geometria analitica e proiettiva*	2000
DORE - *Fondamenti di fotogrammetria*	800
ENRIQUES - *Il significato della storia del pensiero scientifico*	150
— — *Le superficie algebriche,* con prefazione di G. Castelnuovo	3000
ENRIQUES e DE SANTILLANA - *Compendio di storia del pensiero scientifico*	900
ENRIQUES e MAZZIOTTI - *Le dottrine di Democrito d'Abdera*	1500
EVANGELISTI - *La regolazione delle turbine idrauliche*	2000
FILIPPI - *Resistenza dei materiali.* Legato	2800
FINZI - *Meccanica razionale.* Voll. I-II	5000
FINZI e PASTORI - *Calcolo tensoriale e applicazioni*	2000
FOÀ - *Fondamenti di termodinamica*	3000
FUBINI e ALBENGA - *La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni.* Vol. I	4000
LEVI-CIVITA - *Opere matematiche - Memorie e note.* Volume I: 1893-1900	8000
LEVI-CIVITA - *Caratteristiche dei sistemi differenziali ecc.*	200
LEVI-CIVITA e AMALDI - *Nozioni di balistica esterna*	150
— — *Compendio di mecc. razionale.* I	2000
— — *Compendio di mecc. razionale.* II	2000
— — *Lezioni di meccanica razionale:*	
Vol. I: *Cinematica - Principî e statica*	5000
Vol. II: *Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà* — Parte I	4000
Vol. II: *Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà* — Parte II	5000

EDITORE NICOLA ZANICHELLI - BOLOGNA

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE